ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ ТЕХНИКУМ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНБАССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

«УТВЕРЖДАЮ»
Заместитель директора по УМР,
председатель методического совета
_____ Л.Л. Кузьмина
«_3_» _января_ 2024 г.

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА
открытого занятия
дисциплина ОДБ.07 Математика

тема: «Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах»

Алчевск
2024

Разработала: _____ О.А.Гиркина, преподаватель первой категории

Согласовано: _____ С.И. Васильченко, методист

Рассмотрено и одобрено на заседании
методической комиссии «Естественнонаучных дисциплин»
Протокол от «9» января 2024 г. № 1
Председатель методической комиссии _____ О.А. Гиркина

Тема: «Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах»

Образовательная цель: познакомить обучающихся с возможностями использования математического аппарата дифференциального исчисления в экономических расчетах; обобщить знания в области производной с помощью решения задач экономического содержания.

Развивающая цель: развитие способности к самостоятельному планированию и организации работы; развитие логического мышления обучающихся; навыков частично-поисковой деятельности

Воспитательная цель: воспитание познавательного интереса к математике; самостоятельности, способности к коллективной работе; информационной культуры и культуры общения.

Тип урока: комбинированный.

Форма работы: фронтальная, коллективная

Методы обучения: частично-поисковый.

Необходимое оборудование и материалы: доска, мультимедийный проектор, презентация занятия.

Основные этапы занятия:

- Организационный момент (создание мотивационной базы занятия).
- Актуализация знаний.
- Экономический смысл производной.
- Применение производной в экономике
- Домашнее задание.
- Подведение итогов занятия.

Литература:

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. - М.: Просвещение, 2016.

2. Интернет-ресурсы.

Организационный момент

Производная относится к числу математических понятий, которые носят межпредметный и метапредметный характер, и широко применяются в физике, экономике, химии, биологии, в технике и других отраслях наук. Изучение

материала по этой теме имеет принципиальное значение, так как здесь показывается приложение к решению различных экономических задач, то есть возможности применения элементов дифференциального исчисления в описании и изучении процессов и явлений реального мира.

Актуализация знаний

Изучение связей экономических величин в виде функций – базовая задача экономического анализа. Основа основ любой экономики – это производство, т. к. оно позволяет людям удовлетворять свои многочисленные потребности. Экономистам все время приходится решать одну глобальную задачу – удовлетворение неограниченных потребностей ограниченными ресурсами.

В экономике очень часто требуется найти значение таких показателей, как предельная производительность труда, максимальная прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки и так далее. Дифференциальное исчисление получило широкое применение как математический аппарат для экономического анализа и его развития в экономике. Базовой задачей экономического анализа является изучение связей экономических величин, записанных в виде функций.

Для решения подобных задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления.

Нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума функции с помощью производной.

Задачи данной категории можно разделить на несколько групп:

1. Задачи на производительность труда;
2. Задачи на оптимизацию процесса;
3. Задачи на эластичность спроса;
4. Задачи на оборот предприятия;
5. Задачи на предельные издержки производства и дополнительные затраты на производство.

Все эти группы задач можно решить с помощью задания функции, отыскания производной, а с её помощью максимумов и минимумов функции.

Экономический смысл производной

Применение производной в экономике позволяет получать так называемые *предельные характеристики* экономических объектов или процессов. Предельные величины (предельная выручка, полезность, производительность, предельный доход, продукт и др.) характеризуют *не*

состояние, а скорость изменения экономического объекта или процесса по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Применение производной в экономике

Издержки производства.

Если издержки производства ***y*** рассматривать как функцию выпускаемой продукции ***x***, т.е. *y=C(x)*, то $y' = C'(x)$ будет выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. *Средние издержки* являются издержками на единицу выпуска продукции: $y_1 = \frac{C(x)}{x}$.

Пример. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид: $y(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250$ (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значение при $x = 10$.

Решение. Найдем производную $y'(x)$ и ее значение $y'(10)$ — предельные издержки производства:

$$y'(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}4x + 5; y'(10) = 30 - 24 + 5 = 11.$$

Средние издержки:

$$y_1(x) = \frac{0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250}{x} = 0{,}1x^2 - 1{,}2x + 5 + \frac{250}{x};$$

$$y_1(10) = 10 - 12 + 5 + 25 = 28.$$

Это означает, что при данном уровне производства (количестве выпускаемой продукции) средние затраты на производство одной единицы продукции) составляют 28 ден. ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме приближенно в 11 ден. ед.

Производительность труда

Пусть функция $u(t)$ выражает объем произведенной продукции ***y*** за время ***t.*** Тогда производная объема произведенной продукции по времени $u'(t_0)$ есть *производительность труда* в момент t_0.

Пример. Объем производства зимней обуви u, выпускаемой некоторой фирмой, описан уравнением$u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$ (ед.), где t — календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения:

а) в начале года $(t = 0)$;

б) в середине года $(t = 6)$;

в) в конце года $(t = 12)$.

Решение. Производительность труда выражается производной

$z(t) = u'(t) = t^2 - 7t + 6$ (ед./мес.),

а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z(t) = [\ln z(t)]'$:

$z'(t) = 2t - 7$ (ед./мес.^{2}), $T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{2t-7}{t^2-7t+6}$ (ед./мес.).

В заданные моменты времени соответственно имеем z(0)=6 (ед./мес.), $z'(0) = -7$(ед./мес.^{2}), $T_z(0) = -1{,}167$ (ед./мес.), $z(6) = 0$ (ед./мес.), $z'(6) = 5$ (ед./мес.^{2}), $T_z(6)$не существует (так как $z(6) = 0$), $z'(12) = 66$(ед./мес.^{2}), $z'(12) = 17$ (ед./мес.^{2}), $T_z(12) = 4{,}125$ (ед./мес.).

Функция потребления и сбережения.

Если *x*— национальный доход, $C(x)$ — функция потребления (часть дохода, которая тратится), а $S(x)$ — функция сбережения, то

$x = C(x) + S(x)$.

Дифференцируя, получим, что

$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1$,

где $\frac{dC}{dx}$ — предельная склонность к потреблению;

$\frac{dS}{dx}$ — предельная склонность к сбережению.

Пример. Функция потребления некоторой страны имеет вид:

$C(x) = 15 + 0{,}25x + 0{,}36x^{\frac{4}{3}}$,

где ***x*** — совокупный национальный доход (ден. ед.).

Найти:

а) предельную склонность к потреблению;

б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 27 ден. ед.

Решение. Предельная склонность к потреблению:

$C'(x) = 0{,}25 + 0{,}48x^{\frac{1}{3}}$; ее значение: $C'(27) = 0{,}25 + 0{,}48 \cdot \sqrt[3]{27} = 1{,}69$.

Предельная склонность к сбережению:

$S'(x) = 1 - C'(x) = 0{,}75 - 0{,}48x^{\frac{1}{3}}$;

ее значение: $S'(27) = 1 - 1{,}69 = -0{,}69$.

Эластичность

Эта мера реагирования одной переменной величины на изменение другой. *Эластичность* функции приближенно показывает, на сколько процентов изменится одна переменная в результате изменения другой переменной на 1%.

Эластичность функции определяется с помощью соотношения:

$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x$ или $E_x(y) = x \cdot T_y$,

где $T_y(x) = (\ln y)' = \frac{1}{y} y'_x$—*относительная скорость изменения* (*темп*) функции.

Эластичность функции применяется при анализе спроса и предложения от цены (*ценовая эластичность*). Она показывает реакцию спроса или предложения на изменение цены и определяет, на сколько процентов приближенно изменится спрос или предложение при изменении цены на 1%.

Если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считается эластичным, если $|E_x(y)| = 1$ — нейтральным (с единичной эластичностью), а если $|E_x(y)| < 1$ — неэластичным относительно цены.

Пример. Функция спроса $= \frac{3p+14}{p+3}$ и предложения $s = p + 2$, где q и s— количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p — цена единицы товара.

Найти:

а) равновесную цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются;

б) эластичность спроса и предложения;

в) изменение дохода при увеличении цены на 10% от равновесной.

Решение.

а) Равновесная цена определяется из условия $q = s$, т.е. $\frac{3p+14}{p+3} = p + 2$, откуда $p=2$, т.е. равновесная цена равна 2 ден. ед.

б) Найдем эластичность по спросу и предложению

$E_p(q) = -\frac{5p}{(p+3)(3p+14)}; E_p(s) = \frac{p}{p+2}$.

Для равновесной цены p=2 имеем $E_{p=2}(q) = -0{,}1; E_{p=2}(s) = 0{,}5$.

Так как полученные значения эластичности меньше 1 (по абсолютной величине), то спрос и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения.

в) При увеличении цены p на 10% от равновесной спрос уменьшается на 0,1×10=1%, следовательно, доход ***pq*** возрастет приближенно на 9%.

Экономический смысл производной заключается в следующем: производная является важнейшим инструментом экономического анализа, позволяющим углубить геометрический и математический смысл экономических понятий, а также выразить ряд экономических законов с

помощью математических формул. С ее помощью решаются важнейшие экономические задачи. На практике производная служит очень хорошим инструментом при решении задач оптимизационного характера: на производительность труда, эластичность спроса и др. Из этого следует вывод, что производная играет важную роль в экономике. Задачи, решаемые с помощью производной, широко используются в производстве.

Домашнее задание

1. Зависимость между издержками производства $\boldsymbol{y}$ и объемом выпускаемой продукции $\boldsymbol{x}$ на предприятии выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

2. Выручка от продажи конфет составляет $p = 100x - 0{,}5x^2$, где *x* — объем проданной продукции (тыс.ед.). Найти среднюю и предельную выручку, если продано: *а*) 10 тыс. ед.; *б*) 60 тыс. ед.

3. Функция издержек производства $\boldsymbol{y}$ от объема выпускаемой продукции $\boldsymbol{x}$ имеет вид $y = 100x - 0{,}2x^3$. Определить среднюю и предельную себестоимость выпускаемой продукции при объеме, равном 10 ед.

4. Производительность труда бригады может быть описана уравнением $y = -2{,}5t^2 + 15t + 100$, где $0 \le t \le 8$ — рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительность труда при t=2 и t=7.

5. Функция потребления некоторой страны имеет вид:

$C(x) = 13 + 0{,}25x + 0{,}37x^{\frac{4}{5}}$, где *x*— совокупный национальный доход.

Найти: *а*) предельную склонность к потреблению; *б*) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 32.

6. Функция полных затрат в зависимости от объема выпускаемой продукции задана соотношением: $y = x^3 - 2x^2 + 96$. При каком объеме производства предельные и средние затраты совпадают?

7. Функции спроса *q*и предложения *s*на некоторый товар от его цены *x* задаются уравнениями: $q = \frac{2x+15}{x+5}, s = \frac{3x+15}{x+10}$.Найти: *а*) равновесную цену; *б*) Эластичность спроса и предложения для равновесной цены; *в*) изменение дохода при изменении равновесной цены на 5%.